第27卷 第5期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 5
2010年10月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0889-05

基于均方指数稳定的一类随机不确定系统的可靠控制*

丁德锐[1]， 费为银[1]， 梁 艳[2]

(1- 安徽工程大学数理学院，芜湖 241000； 2- 安徽工程大学管理工程学院，芜湖 241000)

摘 要: 本文在均方指数稳定意义下，研究了一类带连续故障模型的范数有界不确定随机系统的可靠控制问题。借助于Lyapunov稳定性定理和线性矩阵不等式方法，获得了可靠控制器存在的充分条件，以及可靠控制器的设计表达式。同时，借助于数值例子验证了结果的有效性。

关键词: 随机不确定系统；均方指数稳定；可靠控制

分类号: **AMS**(2000) 93E03 **中图分类号**: TP273 **文献标识码**: A

1 引言

由于元器件质量、环境变化等各种因素的影响，执行器失效是实际工程系统经常遇到的问题，因此将系统部件(执行器和传感器)可能发生的故障考虑在控制器设计过程中，所得到的可靠控制器可使闭环系统无论部件是否出现故障都能保持稳定性。在设计中，故障模型分为离散故障模型[1,2]和连续故障模型[3-6]：离散故障模型是把部件输出分为正常和中断两种情况，部件无故障时将输出信号增益设为1，部件发生故障时将输出信号增益设为0；连续故障模型比离散故障模型更实际，它不仅包含离散故障模型中的正常和中断两种情况，而且还描述了由于部件老化、干扰等原因引起输出信号偏离的情形。本文讨论了一类线性随机不确定系统在连续故障模型下的可靠控制问题，利用LMI方法，给出了可靠控制器的解析式。

2 问题描述

考虑如下随机不确定系统

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \mathrm{d}x(t) = (A+\Delta A)x(t)\mathrm{d}t + (B+\Delta B)u(t)\mathrm{d}t + (H+\Delta H)x(t)\mathrm{d}w(t), \\ z(t) = Cx(t), \quad x(0) = \varphi, \end{cases}$$

其中$x(t) \in \mathbf{R^n}$是系统的状态向量，$z(t) \in \mathbf{R^m}$为测量输出向量，$u(t) \in \mathbf{R^p}$是控制输入，$w(t) \in \mathbf{R^q}$是均方可积的外生扰动，A, B, C, H是相应维数的已知定常矩阵；$\Delta A, \Delta B, \Delta H$反映系统模型中变量参数不确定性的不确定实值矩阵，并假设满足

$$\left[\Delta A^T, \Delta H^T\right]^T = \left[M_1^T, M_2^T\right]^T F(t)N_1, \quad \Delta B = M_1F(t)N_2,$$

这里，M_1, M_2, N_1和N_2是已知定常矩阵，$F(t) \in \mathbf{R}^{i\times j}$是时变矩阵，且满足$F^T(t)F(t) \le I$，$I$是相应维数的单位矩阵。

收稿日期: 2009-02-25. **作者简介**: 丁德锐(1981年2月生)，男，讲师. 研究方向：鲁棒控制与随机控制.

*__基金项目__: 国家自然科学基金(10826098)；安徽省自然科学基金(090416225)；安徽省高校自然科学基金(KJ-2008B143).

同文献[5]类似，本文考虑的控制器形式为$u(t) = Kz(t)$；执行器连续增益故障模型为$u^f(t) = \Theta u(t)$，其中$\Theta = \mathrm{diag}(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p)$称为执行器故障矩阵，$0 \le \theta_{li} \le \theta_i \le \theta_{ui}\,(i = 1, 2, \cdots, p)$，设

$$\Theta_0 = \mathrm{diag}(\theta_{01}, \theta_{02}, \cdots, \theta_{0p}), \quad J = \mathrm{diag}(j_1, j_2, \cdots, j_p),$$
$$W = \mathrm{diag}(w_1, w_2, \cdots, w_p), \quad \tilde{W} = \mathrm{diag}\big(|w|_1, |w|_2, \cdots, |w|_p\big).$$

于是$\Theta = \Theta_0(I + W)$, $\tilde{W} \le J \le I$。

将$u^f(t) = \Theta KCx(t)$代入，可得闭环系统为

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \mathrm{d}x(t) = (\bar{A} + \Delta\bar{A})x(t)\mathrm{d}t + (B + \Delta B)u(t)\mathrm{d}t + (H + \Delta H)x(t)\mathrm{d}w(t), \\ z(t) = Cx(t), \quad x(0) = \varphi, \end{cases}$$

系统的平衡点$x_e = 0$，这里$\bar{A} = A + B\Theta KC$, $\Delta\bar{A} = M_1FN_1 + N_2\Theta KC$。

3 主要结果

为了证明结论，需介绍以下引理。

引理1[7] 对于给定的适当维数的矩阵M, F, N和任意$\delta > 0$的数，如果$F^TF \le I$，有

$$MFN + N^TF^TM^T \le \delta MM^T + \delta^{-1}N^TN.$$

定理1 对不确定随机闭环系统Σ_2，如果存在对称正定矩阵$\tilde{P} > 0$和一正常数υ，满足

$$\begin{bmatrix} (\bar{A} + \Delta\bar{A})\tilde{P} + \tilde{P}(\bar{A} + \Delta\bar{A})^T + \upsilon\tilde{P} & \tilde{P}(H + \Delta H)^T \\ (H + \Delta H)\tilde{P} & -\tilde{P} \end{bmatrix} < 0, \tag{1}$$

那么对所有的$x(t) \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$，系统$\Sigma_2$在平衡点$x_e = 0$处是均方指数稳定的。

证明 令$\tilde{P} = P^{-1}$，定义Lyapunov函数$V(t, x) = x^T(t)Px(t)$，根据随机系统的稳定性理论[8]即可得证。

定理2 对随机不确定系统Σ_1，可设计一可靠控制器$K = \bar{P}\tilde{P}C^{-1}$，使得即使当执行器存在连续增益故障，以及所有可能的不确定性ΔA, ΔB, ΔH时，对应的闭环系统Σ_2在平衡点$x_e = 0$处依然是均方指数稳定的，其中，对称正定矩阵$\tilde{P} > 0$，矩阵$\bar{P}$以及存在三个正常数υ, δ, ε满足

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \tilde{P}H^T + \delta M_1M_2^T & \bar{P}(N_2\Theta_0)^T + \varepsilon\Theta_0\Theta_0^TN_2^T & \tilde{P}N_1^T & \bar{P}^T & \sqrt{\upsilon}I \\ * & -\tilde{P} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \delta I + \varepsilon N_2\Theta_0\Theta_0^TN_2^T & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\delta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tilde{P} \end{bmatrix} < 0, \tag{2}$$

这里“*”表示对称矩阵的对称元素

$$\Xi_1 = A\tilde{P} + \tilde{P}A^T + B\Theta_0\bar{P} + \bar{P}^T\Theta_0^TB^T + 2\delta M_1M_1^T + \varepsilon B\Theta_0\Theta_0^TB^T.$$

证明 令 $\tilde{P} = P^{-1}$，由定理 1 知

$$\begin{bmatrix} S & (H+\Delta H)^T \\ H+\Delta H & -P^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\bar{A}+\bar{A}^TP+\upsilon P & H^T \\ H & -P^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P\Delta\bar{A}+\Delta\bar{A}^TP & \Delta H^T \\ H & 0 \end{bmatrix} < 0, \tag{3}$$

其中 $S = P(\bar{A}+\Delta\bar{A}) + (\bar{A}+\Delta\bar{A})^TP + \upsilon P$。进一步地，由引理 1，对任一正常数 $\delta > 0$，有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P\Delta\bar{A}+\Delta\bar{A}^TP & \Delta H^T \\ H & 0 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} PM_1 \\ M_2 \end{bmatrix} F(t)[N_1,\, 0] + \begin{bmatrix} N_1^T \\ 0 \end{bmatrix} F^T(t)[M_1^TP,\, M_2^T] \\ & + \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \end{bmatrix} F(t)[N_2\Theta KC,\, 0] + \begin{bmatrix} (N_2\Theta KC)^T \\ 0 \end{bmatrix} F(t)[M_1^TP,\, 0] \\ \le\ & \delta \begin{bmatrix} PM_1 \\ M_2 \end{bmatrix} [M_1^TP,\, M_2^T] + \delta \begin{bmatrix} PM_1 \\ 0 \end{bmatrix} [M_1^TP,\, 0] \\ & +\delta^{-1} \begin{bmatrix} N_1^T \\ 0 \end{bmatrix} [N_1,\, 0] + \delta^{-1} \begin{bmatrix} (N_2\Theta KC)^T \\ 0 \end{bmatrix} [N_2\Theta KC,\, 0]. \end{aligned}$$

利用 Schur 补引理，当下式成立时必有式 (3) 成立。

$$\begin{bmatrix} P\bar{A}+\bar{A}^TP+\upsilon P+2\delta PM_1M_1^TP & H^T+\delta PM_1M_2^T & (N_2\Theta KC)^T & N_1^T \\ * & -P^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -\delta I & 0 \\ * & * & * & -\delta I \end{bmatrix} < 0, \tag{4}$$

上式左右两端同时乘以 $\mathrm{diag}[P^{-1},\, I,\, I,\, I]$，并取 $\tilde{P} = P^{-1}$，$\bar{P} = KCP^{-1}$，有

$$\begin{bmatrix} A\tilde{P}+\tilde{P}A^T+\upsilon\tilde{P}+2\delta M_1M_1^T+B\Theta\bar{P}+B^T(\Theta\bar{P})^T & \tilde{P}H^T+\delta M_1M_2^T & \bar{P}^T(N_2\Theta)^T & \tilde{P}N_1^T \\ * & -\tilde{P}^{-1} & 0 & 0 \\ * & * & -\delta I & 0 \\ * & * & * & -\delta I \end{bmatrix} < 0. \tag{5}$$

又根据 $\Theta = \Theta_0(I+W)$，利用引理 2，当下式成立时，式 (5) 也成立

$$\begin{bmatrix} \Xi_2 & \tilde{P}H^T+\delta M_1M_2^T & \bar{P}^T(N_2\Theta_0)^T+\varepsilon B\Theta_0\Theta_0^TN_2^T & \tilde{P}N_1^T & \bar{P}^T \\ * & -\tilde{P}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\delta I+\varepsilon N_2\Theta_0\Theta_0^TN_2^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -\delta I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

其中

$$\Xi_2 = A\tilde{P} + \tilde{P}A^T + \upsilon\tilde{P} + 2\delta M_1M_1^T + B\Theta_0\bar{P} + B\Theta_0\bar{P} + B\Theta_0\Theta_0^TB^T.$$

再次利用Schur补引理，即得证。

4 数值例子

考虑如下参数的随机不确定系统

$$A = \begin{bmatrix} -2.0 & -1.2 & 4.7 \\ 0.7 & -6.4 & -0.2 \\ 0.5 & 0.9 & -3.4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.8 \\ -1.9 & 1.2 \\ 1.2 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0.2 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 & 0.7 \\ -0.7 & 0.5 & 0.3 \\ -0.6 & -0.8 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.15 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.23 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0.1 & 0.15 \\ 0 & 0.1 & 0.13 \end{bmatrix}.$$

假设与3个状态变量相关的2个传感器故障变化范围分别为

$$0.8990 \le \theta_1 \le 1.4730, \quad 0.6259 \le \theta_2 \le 1.1025,$$

则对应的传感器故障矩阵参数为：$\Theta_0 = \mathrm{diag}[1.1860, 0.8642]$，利用Matlab-LMI工具箱，可得

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 9.0115 & -0.2728 & -1.7682 \\ -0.2728 & 6.6624 & 0.6097 \\ -1.7682 & 0.6097 & 3.4795 \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} 1.5747 & -3.0250 & -4.2871 \\ -1.1160 & -1.5861 & -1.3395 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 6.7777 & -11.7347 \\ -12.8477 & 11.8439 \end{bmatrix}.$$

由此可以看出，本文提供的方法，对一些存在不确定和传感器故障的随机系统可靠控制器的设计是切实可行的。

参考文献：

[1] Veillette R J. Reliable linear-quadratic state feedback control[J]. Automatica, 1995, 31(1): 137-143

[2] Wang Z D, Qiao H. H_∞ reliable control of uncertain linear state delay systems[J]. Journal of Dynamical and Control Systems, 2004, 10(1): 55-76

[3] Liao F, Wang J L, Yang G H. Reliable robust flight tracking control: an LMI approach[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2002, 10(1): 76-89

[4] Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Reliable LQG control with sensor failures[J]. IEE Proceedings-Part D, Control Theory and Applications, 2000, 147(4): 427-432
[5] 王福忠等. 线性不确定系统具有方差约束的可靠控制[J]. 东北大学学报(自然科学版)，2004, 25(7): 613-616
Wang F Z, *et al.* Reliable control with variance constraints for linear uncertain systems[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science), 2004, 25(7): 613-616
[6] Wu H N. Reliable LQ fuzzy control for nonlinear discrete-time systems via LMIs[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B, 2004, 34(2): 1270-1275
[7] Wang Y, Xie L, De Souza C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear system[J]. Systems and Control Letters, 1992, 19: 139-149
[8] Khasminski R Z. Stochastic Stability of Differential Equations[M]. Rockville, Maryland: S&N International Publisher, 1980

Reliable Control of Uncertain Stochastic Systems Based on the Mean Square Exponential Stability

DING De-rui[1], FEI Wei-yin[1], LIANG Yan[2]

(1- School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000;
2- School of Management, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000)

Abstract: Based on the mean square exponential stability, the reliable control problem for uncertain stochastic systems is studied. The parameter uncertainties are time-varying and unknown but are norm-bounded, and the fault model is a more general continuous one. By the Lyapunov stability theory and the linear matrix inequality (LMI) approach, the sufficient condition for existence of desired reliable controller is obtained, meanwhile the state feedback reliable controller is designed. Finally, the applicability and effectiveness of our method is illustrated through a numerical example.

Keywords: uncertain stochastic systems; mean square exponential stability; reliable control

Received: 25 Feb 2009. **Accepted:** 10 Dec 2009.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10826098); the Natural Science Foundation of Anhui Province (090416225); the Anhui Natural Science Foundation of University (KJ2008B143).